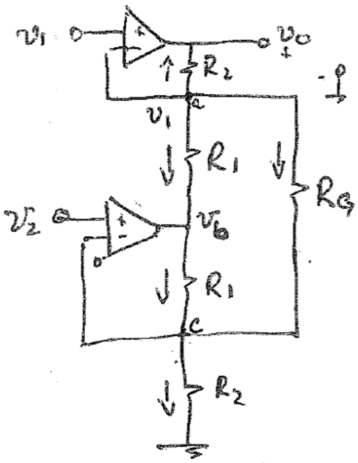
INEL 3105 Lecture # 11.

Note Title 9/25/2009



KCL@ A:

$$+\left(\frac{v_1-v_o}{R_2}\right)+\left(\frac{v_1-v_2}{R_G}\right)+\left(\frac{v_1-v_b}{R_1}\right)=0$$

KCL @ C:

$$\frac{v_b-v_2}{R_1}+\frac{v_1-v_2}{R_G}-\frac{v_2}{R_2}=0$$

$$\frac{v_b-v_2}{R_1}=\frac{v_2}{R_2}+\left(\frac{-v_1+v_2}{R_G}\right)$$

$$v_b=\left[\left[\frac{v_2}{R_2}+\frac{(v_2-v_1)}{R_G}\right]R_1\right]+v_2$$

KCL@ A:

$$\cancel{\frac{v_1-v_b}{R_2}}\quad \frac{v_1}{R_2}-\frac{v_o}{R_2}+\frac{v_1}{R_G}-\frac{v_2}{R_G}+\frac{v_1}{R_1}-\frac{1}{R_1}\left[\left[\frac{v_2}{R_2}+\frac{(v_2-v_1)}{R_G}\right]R_1+v_2\right.$$

$$v_1\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_G}+\frac{1}{R_1}\right)+v_2\left(\frac{-1}{R_G}\right)-\left[\frac{v_2}{R_2}+\frac{v_2-v_1}{R_G}+\frac{v_2}{R_1}\right]=\frac{v_o}{R_2}$$

$$v_1\left(\frac{1}{R_2}+\frac{2}{R_G}+\frac{1}{R_1}\right)+v_2\left(\frac{-2}{R_G}-\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)=\frac{v_o}{R_2}$$

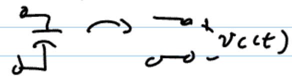
$$\cancel{(v_1-v_2)\left[\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_2}\right]}\quad v_o=v_1\left(1+\frac{2R_2}{R_G}+\frac{R_2}{R_1}\right)-v_2\left(\frac{2R_2}{R_G}+1+\frac{R}{R}\right.$$

$$\boxed{v_o=\left(1+\frac{2R_2}{R_G}+\frac{R_2}{R_1}\right)(v_1-v_2)}$$

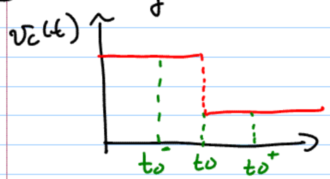
Respuesta transitoria de primer orden:

$i_C = C\dfrac{dv_C(t)}{dt}$; ① en régimen permanente,

$\dfrac{dv_C(t)}{dt} = 0$; $i_C = 0$ $\therefore$ condensadores en dc son circuitos abiertos



② Abrir y cerrar interruptores



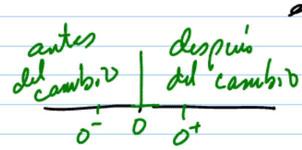
$i_C(t) = C\dfrac{d\,v_C(t)}{dt}$; $\left.\dfrac{dv_C(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \infty \Rightarrow i_C = \infty$

$\therefore$ energía $= \infty$

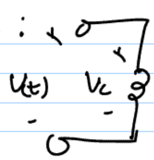
PERO, situaciones parasíticas no permiten energía $= \infty$.

$v_C(t_0^-) = v_C(t_0^+)$

$v_C(0^-) = v_C(0^+)$



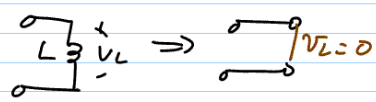
Inductores:



$v(t) = v_L(t)$; Faraday: $v(t) - 0 = \dfrac{d\phi_B}{dt}$

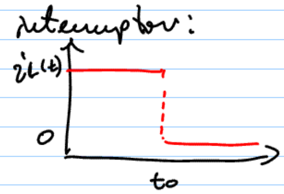
$v(t) = v_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

① En régimen permanente: $\dfrac{di_L(t)}{dt} = 0$ $\quad v_L = 0$ (corto circuito)



② Abrir y cerrar el interruptor:

$v_L = L\dfrac{di_L(t)}{dt}$

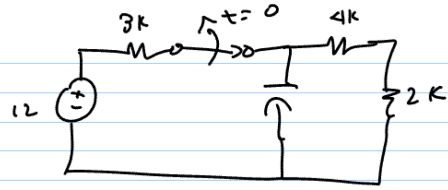


$\left.\dfrac{di_L(t)}{dt}\right|_{t_0} = \infty$; $V_L = \infty \rightarrow$ energía $= \infty$

En ausencia de fuentes infinitas la corriente en un inductor antes y después del cambio;

$i_L(t^-) = i_L(t^+)$

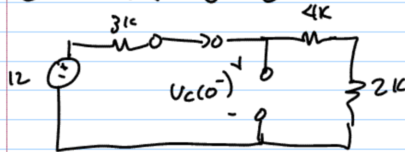
Ejemplo:



Determine $v_C(0^+)$ y $v_C(\infty)$

ckto ha estado en esta configuración por $t = \infty$ (régimen permanente)

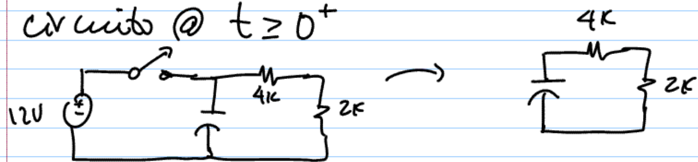
circuito @ $t = 0^-$



$$v_C(0^-) = \cancel{12}^{\,4}\left(\frac{\cancel{6K}^{\,2}}{\cancel{9K}_{\,3}}\right) = 8\ V$$

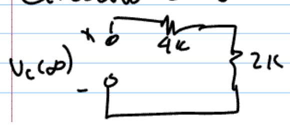
$$V_C(0^-) = 8\ V$$

circuito @ $t \geq 0^+$



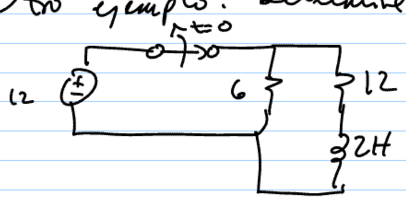
$v_C(0^+) = 8\ V$

Circuito @ $t = +\infty$



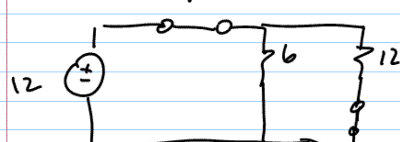
$V_C(+\infty) = 0$

Otro ejemplo: Determine $i_L(\infty)$



Circuito operando para $t \to \infty$

circuito para $t = 0^-$

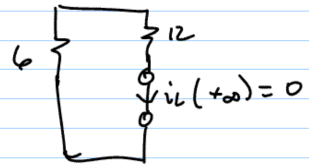


$$i_L(0^-) = \frac{12}{12} = 1A$$

circuito para $t \geq 0$

$i_L(0^+) = 1\ A$

circuito para $t = +\infty$;



Ecuaciones diferenciales de 1er orden:

$\frac{dx(t)}{dt} + a\,x(t) = A$ circuitos RL ó RC :

- Solución particular: $x_p(t)$
  o comportamiento forzado
- Solución complementaria: $x_c(t)$
  o comportamiento natural

- Solución particular → $x_p(t) = K_1$ (Combinación lineal de todos las posibles derivadas de la función de la mano derecha: (e.g. $f(t) = A$)

$\frac{d K_1}{dt} + a K_1 = A$; $K_1 = \frac{A}{a}$

→ Solución complementaria: $\frac{d\,x_c(t)}{dt} + a\,x_c(t) = 0$; $\int \frac{d\,x_c(t)}{x_c(t)} = \int -a\,dt$;

$\ln x_c(t) = -a t + \ln K_2$; $\frac{\ln x_c(t)}{\ln K_2} = -a t$; $\frac{x_c(t)}{K_2} = e^{-at}$; $\boxed{x_c(t) = e^{-at} K_2}$

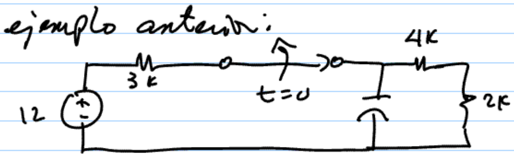
Solución completa : $x(t) = x_p(t) + x_c(t)$
$x(t) = K_1 + K_2 e^{-at}$

Próximo paso: Evaluar K_1 y K_2

$x(0^+) = K_1 + K_2$; $x(+\infty) = K_1$; $K_2 = (x_{0^+}) - K_1 = x(0^+) - x(+\infty)$

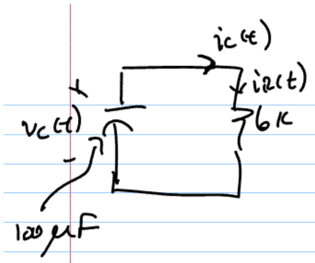
$x(t) = x(+\infty) + [x(0^+) - x(+\infty)] e^{-at}$

ejemplo anterior:



Eval $v_c(t)$ para $t \geq 0^+$

Solución : $v_c(0^-) = v_c(0^+) = 8\,V$



$$i_c(t) = i_R(t) \; ; \; i_R(t) - i_c(t) = 0$$

$$i_c(t) = -C\frac{dv_c(t)}{dt} \; ; \; i_R(t) = \frac{v_c}{6K} \; ;$$

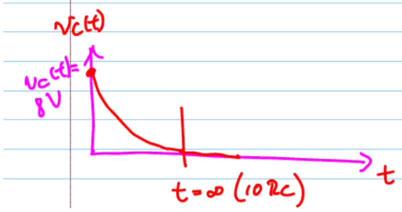
$$C\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{6K} = 0 \; ; \; \underbrace{\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{RC} = 0}$$

compare to: $\dfrac{d\,x(t)}{dt} + a x = 0 \; ; \; a = \dfrac{1}{RC}$

$$x(t) = K_2 e^{-at}$$

$$v_c(t) = K_2 e^{-\frac{1}{RC}t} \; ; \quad \frac{1}{RC} = \frac{1}{6\times10^{-1}\,\text{secs}} = \frac{5}{3}\,\text{secs}^{-1}$$

$$[RC] = \left[\frac{V s}{Q}\right]\cdot\left[\frac{Q}{V}\right] = \text{secs.}$$



$$v_c(0^-) = v_c = 8V$$

$$v_c(0^+) = K_2 = 8V \; ; \quad \boxed{v(t) = 8e^{-5/3\,t}}$$

Procedimiento:

Procedimiento: ⑤

① Se evalúa la condición en $t=0^-$, para el condensador o inductor, o sea: $v_C(0^-)$ ó $i_L(0^-)$, tomando el condensador como circuito abierto y/ó el inductor como circuito cerrado.

② Se establece el circuito para $t=0^+$ usando condiciones iniciales $v_C(0^-) = v_C(0^+)$ ó $i_L(0^-) = i_L(0^+)$; De este circuito se evalúa $x(0^+)$ ← puede ser voltaje ó corriente.

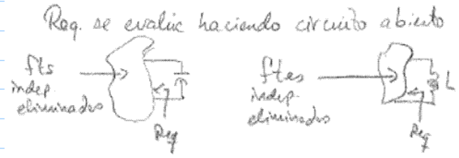
③ Se establece el circuito para $t=\infty$, sustituyendo circuito abierto para el condensador ó corto circuito para el inductor, o sea

$$\lim_{t\to\infty}\left\{ i_C = C\frac{dv_C(t)}{dt} \to 0 \; ; \; v_L = L\frac{di_L(t)}{dt} \to 0 \right.$$

De este ckto se evalúa $x(+\infty)$

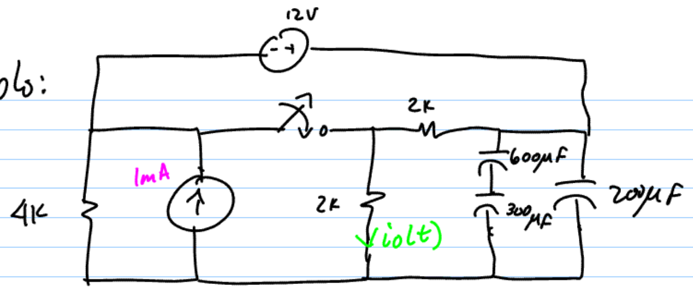
④ Como todas las variables en el ckto tienen la misma τ: para el condensador $\tau = R_{eq}C$, para el inductor $\tau = \frac{L}{R_{eq}}$.

R_{eq} se evalúa haciendo circuito abierto en el condensador o el inductor



⑤ $x(t) = x(\infty) + [x(0^+) - x(\infty)]e^{-t/\tau}$

Ejemplo:

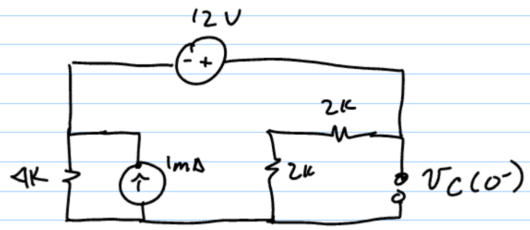


Evaluar $i_o(t)$ para $t \geq 0^+$

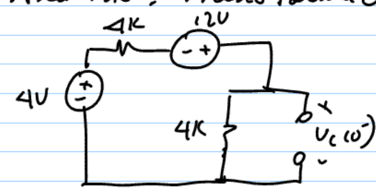
Asuma que los cond. no están cargados inicial

Solución: Evaluación de $v_C(0^-)$

Condensadores en serie: $\left(\frac{600(300)}{900}\right)\mu F + 20\mu F = 400\mu F$

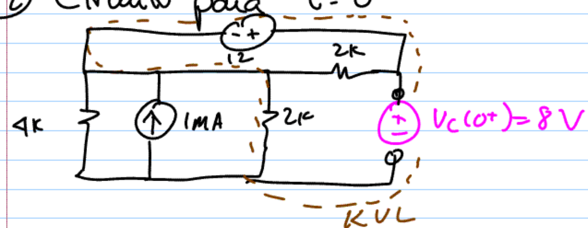


Análisis: Transformación de fuente:



$v_C(0^-) = v_C(0^+) = 8V$

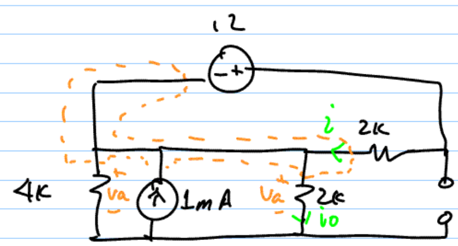
② Circuito para $t = 0^+$



KVL: $8 - 12 - 2K\, i_o(0^+) = 0$

$\boxed{i_o(0^+) = -2mA}$

③ Ccto para $t = \infty$



$i = \frac{12}{2K} = 6mA$

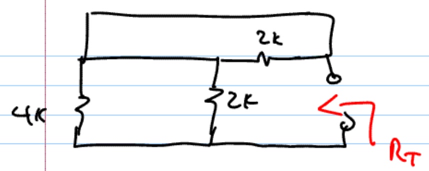
KCL:

$1mA - \frac{2K\, i_o}{4K} - i_o + 6mA = 0$

$V_a = 2K\, i_o$

$7mA = \frac{3}{2} i_o(\infty)$; $\boxed{i_o(\infty) = \frac{14}{3} mA}$

④ Eval $R_{TH} C = \tau$



$R_T = 4k // 2k = \left(\frac{4}{3}\right) k\Omega$

$\tau = R_T C = \left(\frac{4}{3}\right) k\Omega \left(400 \mu F\right) = 0.53$ secs.

(5) $i_o(t) = i_o(\infty) + \left[i_o(0^+) - i_o(\infty) \right] e^{-t/\tau}$

$i_o(t) = \frac{14}{3} mA + \left[-2 - \frac{14}{3} \right] e^{-t/0.533}$; $i_o(t) = \left(\frac{14}{3} - \frac{20}{3} e^{-t/.533} \right) mA$