Respuesta de Frecuencia

Manuel Toledo - INEL 5207 Sistemas Análogos

24 de febrero del 2009

Respuesta de Lazo Cerrado

La respuesta de frecuencia del amplificador puede obtenerse usando la ecuación básica de un sistema con retroalimentación

$$A = \frac{a}{1 + a\beta}$$

Para un AO con un polo dominante, sustituimos

$$a = \frac{a_0}{1 + jf/f_b}$$

y obtenemos

$$A = \frac{\frac{a_0}{1+jf/f_b}}{1 + \frac{a_0}{1+jf/f_b}\beta} = \frac{a_0}{1 + jf/f_b + a_0\beta}$$

Esto puede expresarse como

$$A = \frac{1}{\beta}\frac{1}{1 + \frac{1}{a_0\beta} + j\frac{f}{f_b a_0 \beta}}$$

que a su vez puede representarse como

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+\frac{1}{a_0\beta}}\frac{1}{1 + j\frac{f}{f_b a_0\beta\left(1+\frac{1}{a_0\beta}\right)}} \\ &= \frac{1}{\beta}\frac{1}{1+\frac{1}{a_0\beta}}\frac{1}{1 + j\frac{f}{f_b(a_0\beta+1)}} \\ &\approx \frac{1}{\beta}\frac{1}{1 + j\frac{f}{f_b(a_0\beta+1)}} \end{aligned}$$

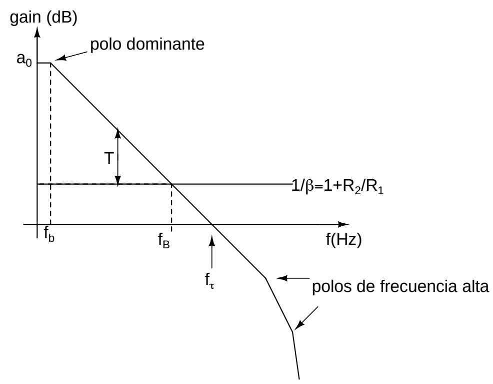
Esta ecuación muestra que la retroalimentación causa que el ancho de banda aumente de f_b (el ancho de banda del AO cuando opera en lazo abierto) a $f_b\,(a_0\beta + 1)$. O sea, el ancho de banda aumenta por el mismo factor que la ganancia d.c. disminuye. Por lo tanto, el producto de la ganancia y el ancho de banda permanece constante y es igual a f_τ.

El ancho de banda del amplificador con retro-alimentación puede representarse por f_B. Dado que la ganancia del aparato puede aproximarse por $1/\beta$,

$$f_b = {}^{f_\tau}\!/_{a_0} \qquad f_B = \beta f_\tau$$

Ancho de banda

La mayoría de los AO son compensados internamente para hacerlos incondicionalmente estables. Esto significa que el circuito interno contiene componentes que hacen que exista un *polo dominante* que se encuentra a una frecuencia mucho mas baja que los demás polos. Esta situación se muestra en la siguiente figura:



El diagrama muestra las siguientes cantidades: la ganancia de lazo abierto a, la ganancia[1] de lazo cerrado del amplificador sin inversión $1 + \frac{R_2}{R_1}$ y la frecuencia de ganancia unitaria f_τ.

Este tipo de aparato se conoce como amplificador con *producto ganancia-ancho de banda (GBP) constante*. Como indica el termino, la reducción en la ganancia del amplificador (causada por el uso de retro-alimentación negativa) esta acompañada de un aumento similar en el ancho de banda, el cual puede ser calculado usando la formula

$$f_B = \beta f_\tau = \frac{f_\tau}{1 + R_2/R_1} = \frac{R_1 f_\tau}{R_1 + R_2}$$

Ejemplo: Calcule el ancho de banda de un amplificador con ganancia $A = +100V/V$ y que utiliza el AO $\mu A741$ con $f_\tau = 1MHz$.

Amplificador con n etapas identicas

Si se desea un GBP más grande, se pueden usar varias etapas para obtener un amplificador con la misma ganancia total. En el ejemplo anterior, la ganancia de $+100V/V$ se puede obtener con dos etapas con ganancia de $+10V/V$. Sin embargo, en este caso el ancho de banda global no es igual al de cada etapa, pues a la frecuencia f_B cada etapa reduce la ganancia por $3dB$ y la atenuación total es $6dB$.

Podemos obtener una formula para determinar el ancho de banda de un amplificador con n etapas idénticas partiendo de la respuesta de frecuencia de cada etapa,

$$A_i = \frac{A_{0i}}{\sqrt{1 + (f/f_B)^2}}$$

Para n etapas la ganancia total es

$$\left(\frac{A_{0i}}{\sqrt{1 + (f/f_B)^2}} \right)^n = \frac{A_0}{(1 + (f/f_B)^2)^{n/2}}$$

donde $A_{0i}^n = A_0$, la ganancia d.c. deseada. Notando que

$$f_B = \frac{f_\tau}{\sqrt[n]{A_0}}$$

y que a la frecuencia f_{BW} (el ancho de banda del amplificador de n etapas) la ganancia total es igual a $A_0/\sqrt{2}$, tenemos que

$$1 + \left(\frac{\sqrt[n]{A_0} f_{BW}}{f_\tau} \right)^2 = \sqrt[n]{2}$$

y

$$f_{BW} = \frac{f_\tau}{\sqrt[n]{A_0}} \sqrt{2^{1/n} - 1}$$

donde f_{BW} es el ancho de banda del amplificador de n etapas, A_0 es la ganancia del amplificador de n etapas, y $\sqrt[n]{A_0}$ es la ganancia de cada etapa.

[1] Igual al reciproco de la función de transferencia de la red de retro-alimentación, $1/\beta$.

Etapas con inversión

La descripción anterior se refiere a n etapas sin inversión. Si se utilizan etapas con inversión, el ancho de banda debe calcularse usando $\beta = {R_1}/{R_2 + R_1}$ aunque la ganancia de cada etapa con inversión es $-R_2/R_1$. La formula anterior aplica sin modificación, pero el GBP del amplificador con inversión es inferior al de un amplificador sin-inversión equivalente.

Ejemplos

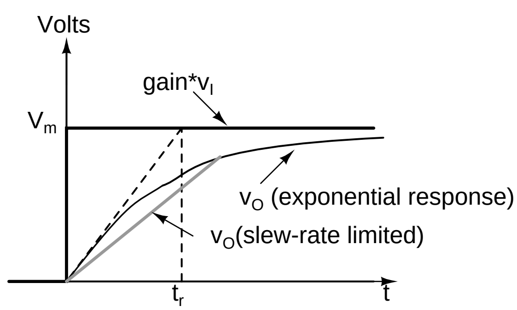
1. Determine el ancho de banda de un amplificador con $A = 500V/V$ si se usan (i) una etapa, (ii) dos etapas, y (iii) tres etapas sin inversión. Asuma que se utiliza el AO $\mu A741$.
2. Determine el ancho de banda de un amplificador si se usan (i) una etapa, (ii) dos etapas, y (iii) tres etapas con inversión para obtener una ganancia total igual a $-500V/V$. Asuma que se utiliza el AO $\mu A741$.

Razón de cambio máxima (*Slew-rate*)

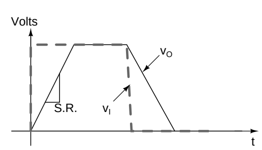
La respuesta de escalón de un sistema de primer orden es

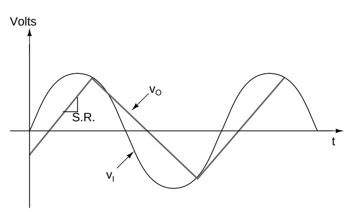
$$v(t) = V_m\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Esta expresión aplica a un amplificador que usa un AO con un polo dominante, en cuyo caso $\tau = \frac{1}{2\pi f_B}$. Sin embargo, debido a limitaciones del circuito interno del AO, si el escalón supera un tamaño particular, una respuesta de pendiente constante precederá a la respuesta exponencial, tal como muestra en la siguiente figura.



La razón máxima a la que puede cambiar el voltaje de salida se conoce como el *slew-rate* (SR). Si la señal requiere que v_{OUT} cambie a una razón superior al SR, la señal se distorsiona y la razón de cambio se limita al SR. Ejemplos de señales limitadas de este modo son los siguientes:





Para determinar el tamaño máximo del escalón que será libre de este tipo de distorsión, observe que para el $v(t)$ que representa la respuesta al escalón,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{V_m}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

es máximo en $t = 0$. Por tanto, si

$$\frac{V_m}{\tau} < SR$$

la salida no será limitada por el SR. Esta formula se puede expresar como

$$V_m \leq \frac{SR}{2\pi f_B}$$

donde V_m representa el tamaño del escalón en la salida del amplificador y $f_B = \beta f_\tau$ es el ancho de banda del amplificador.

En el case de una señal senoidal de frecuencia f,

$$v(t) = V_m \sin(2\pi f t)$$

la razón de cambio es

$$\frac{dv(t)}{dt} = 2\pi f V_m \cos(2\pi f t)$$

y tambien es máxima en $t = 0$ asi que para tener una señal libre de distorsión,

$$2\pi f V_m \leq SR$$

Esta condición se puede expresar como

$$f \leq \frac{SR}{2\pi V_m}$$

o como

$$V_m \leq \frac{SR}{2\pi f}$$

Ejemplos

1. Calcule f_{max} si $V_m = 10V$ y $SR = 0.5V/\mu s$.

Ejercicios

1. Problema 6.33 del libro de texto.

   Los datos se refieren al voltaje de entrada. Para la primera onda cuadrada, el voltaje de salida tiene una amplitud de $5V$ pico y un periodo de $4\mu s$. Nuestro análisis de la respuesta de escalón se basa en el tamaño total del escalón, y corresponde al valor pico-a-pico de la señal de salida, o sea $10V$, así que la onda triangular tiene una pendiente $SR = {}^{10V}\!/_{2\mu s} = {}^{5V}\!/_{\mu s}$. Observe que se usa la mitad del periodo.

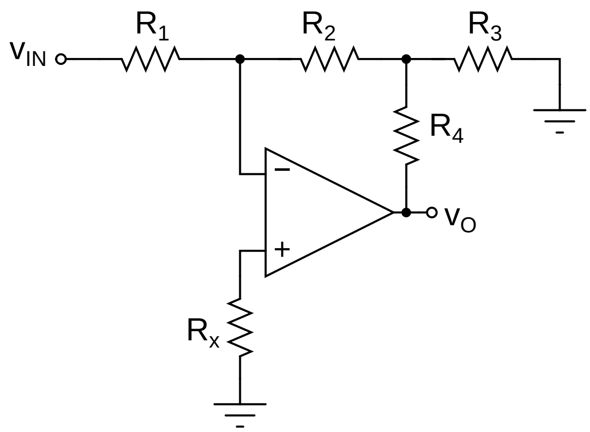
   El segundo dato nos indica que la distorsión desaparece si se aplica una onda de entrada con amplitud pico igual a $0.4V$. Como la respuesta es de primer orden, esto corresponde a $\frac{1}{\tau} = {}^{SR}\!/_{2\pi 1.6V} = 497kHz$. Este valor de $\frac{1}{\tau}$ corresponde a βf_τ según nuestro análisis.

   Observe que el valor de V_{om} corresponde al tamaño total de la respuesta al escalón en la salida, y es igual a $0.4 \times A \times 2 = 0.4 \times 2 \times 2 = 1.6V$ porque el problema especifica el valor pico de la onda de entrada. Además, observe que no conocemos β (pues no sabemos cual es la configuración usada y por lo tanto desconocemos la relación entre la ganancia del amplificador y la β de la red de retro-alimentación) ni f_τ. Si estos valores se pudieran obtener, los datos referentes a la onda con amplitud de $0.4V$ no serian necesarios. Si asumimos que el amplificador utiliza una configuración simple de dos resistencias, entonces la $\beta = 1/3$ y el problema implica que $f_\tau \approx 1.5MHz$.

   $f_B = \beta f_\tau$ corresponde al ancho de banda útil si el amplificador no sufre limitaciones debido al *slew-rate*. Para la señal ac con amplitud $2 \times 3.5 \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ a la que se refiere el problema, la frecuencia máxima que esta libre de distorsión es $f = {}^{5V/\mu s}\!/_{2\pi 2\sqrt{2}} \approx 80kHz$. Por lo tanto, la respuesta esta limitada por el SR (*large-signal limited*) y el ancho de banda útil es $80kHz$.

   Observe que mientras para la onda cuadrada el análisis utilizó el valor pico-pico, para la onda senosoidal se usó el valor pico.

2. Para el siguiente circuito,



a) escoja las resistencias R_1, R_2, R_3 y R_4 para obtener una ganancia de voltaje de $-1000V/V$ y una resistencia de entrada de $1k\Omega$, usando las resistencias más pequeñas posibles, pero sin exceder la mitad de la corriente máxima que el AO puede proveer o absorber. Asuma que la entrada se mantiene entre $\pm 10mV$.

RESPUESTA:

Si la entrada es $-10mV$, la salida es $10V$. Como la corriente máxima del AO (asumiendo un $\mu A741$) es $20mA$, la corriente a través de R_4 debe mantenerse cerca de $10mA$.

La salida del circuito puede expresarse como

$$v_O = -v_{IN} \times \frac{R_2}{R_1} \times \left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3}\right)$$

La ganancia deseada puede obtenerse de muchas formas. Seleccionando $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 11.5\Omega$ y $R_4 = 1020\Omega$ obtenemos una ganancia igual a $-999V/V$. La corriente de salida, dada por

$$i_4 = \frac{v_{IN}}{R_1}\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)$$

seria igual a $9.7mA$, bastante cerca del objetivo de $10mA$.

b) estime el peor error que se espera en la salida debido al efecto de I_B, I_{OS} y V_{OS} si $R_x = 0$; repita pero esta vez escoja R_x de tal modo que el error se minimice;

RESPUESTA:

Usando superposición, podemos expresar los errores debido a i_N, i_P y V_{OS},

$$e_{i_N} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_4}\right) R_4 i_N$$

$$e_{i_P} = -\left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_4}{R_1} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_4}{R_3}\right) R_x i_P$$

$$e_{OS} = \left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_2}{R_1}\right)\frac{R_4}{R_3} V_{OS}$$

respectivamente. Sustituyendo los valores asignados anteriormente a las resistencias, obtuve que

$$e_{i_N} = +9990\Omega \times i_N$$

$$e_{i_P} = -1089 \times R_x \times i_P$$

$$e_{OS} = +1078 \times V_{OS}$$

Asi que si $\underline{R_x = 0}$, el error en la salida es

$$e = +9990\Omega \times (I_B + I_{OS}) + 1078 \times V_{OS}$$

Para el $\mu A741$, este valor puede superar los $5V$ debido a la alta ganancia del amplificador y a que V_{OS} puede alcanzar los $5mV$. R_x puede escogerse igual a ${}^{9990}\!/_{1089} = 9.2\Omega$ para cancelar el componente debido a I_B. En todo case, es necesario ajustar el circuito para reducir el error debido a V_{OS}, o escoger otro AO con un V_{OS} mucho más bajo.

c) determine la frecuencia más alta de la señal senosoidal que el circuito será capaz de amplificar sin superar el *slew-rate*;

RESPUESTA:

De las notas del curso,para que no exista distorsión debido al SR,

$$fV_{om} \leq \frac{SR}{2\pi}$$

así que, para un $SR = 0.5V/\mu s$,

$$f_{max} = \frac{SR}{2\pi V_{om}} = \frac{0.5}{2\pi \times 10} MHz = 8kHz$$

d) simule el circuito en SPICE y verifique que los resultados anteriores son correctos.

3. Un instrumento utiliza un convertidor análogo-digital (ADC) de 10-bits que acepta una señal senosoidal de entrada con amplitud de hasta $\pm 2.5V$ con una frecuencia de $200,000$ muestras por segundo (o una frecuencia de señal máxima de 100kHz). El instrumento será usado para leer la salida de un sensor que provee un voltaje en un rango de $\pm 5mV$.

a) Diseñe un amplificador para acoplar el sensor al ADC usando AOs con $f_\tau = 2MHz$, pero ideales en otros aspectos. Específicamente, asuma que los AO no muestran limitaciones debido al *slew-rate*. Utilice el número mínimo de etapas no-invertidoras idénticas necesario para usar el ancho de banda del ADC.

RESPUESTA:

Debemos obtener primero la ganancia. Para las cantidades especificadas, $A_v = \frac{2.5V}{5mV} = +500$. Si usamos una etapa, el ancho de banda seria $f_{3dB} = \frac{f_\tau}{A_v} = \frac{2\times 10^6 Hz}{500} = 4kHz$, así que es necesario usar múltiples etapas. El ancho de banda de n etapas no-invertidoras idénticas , cada una con ganancia d.c. A_0, esta dado por

$$f_{3dB} = \frac{f_\tau}{A_0}\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Para 3 etapas,

$$f_{3dB} = \frac{2\times 10^6 Hz}{500^{\frac{1}{3}}}\sqrt{2^{\frac{1}{3}} - 1} = 128kHz$$

lo cual es adecuado. Así que cada etapa debe tener una ganancia $A_{v1} = 500^{\frac{1}{3}} = 7.94$.

b) Para su diseño, determine el valor máximo de V_{OS} que los AO pueden mostrar sin exceder un error mayor a $\pm\frac{1}{2}$ bit. Desprecie errores debidos a I_B e I_{OS}.

RESPUESTA:

Para el ADC de 10-bit descrito en el problema, medio bit equivale a $\frac{1}{2} \times \frac{2\times 2.5V}{2^{10}} \approx 2.4mV$. El error en la salida del amplificador debe ser menor que este valor. Mientras que el *offset* del AO que esta conectado al sensor es amplificado por las tres etapas, el del segundo AO es solo amplificado por dos etapas y el del tercer AO solo por una etapa. En el peor caso, todos los *offsets* tienen el mismo signo y

$$E_o = 500 \times V_{OS} + 7.94^2 \times V_{OS} + 7.94 \times V_{OS} = 2.4mV$$

lo que permite estimar que V_{OS} debe ser menor a $\frac{2.4mV}{571} = 4.2\mu V$.

c) Cual es el *slew-rate* minimo que se requiere para que no haya distorsión?
RESPUESTA:
De las notas del curso,para que no exista distorsión debido al SR,

$$fV_{om} \leq \frac{SR}{2\pi}$$

Asi que nuestro diseño requiere

$$SR \geq 2\pi f_{3dB} V_{om} = 2\pi \times 2.5V \times 100kHz = 1.57V/\mu s$$