

# Estabilidad

Manuel Toledo INEL 5207 Sistemas Análogos  
Universidad de Puerto Rico, Mayaguez, P.R.  
(Dated: 9 de marzo de 2009)

## I. CONCEPTOS BÁSICOS

La ecuación básica de un amplificador con retroalimentación

$$A(s) = \frac{a(s)}{1 + \beta(s)a(s)}$$

muestra que la presencia de la retroalimentación mueve los polos del amplificador. La posición de los nuevos polos de  $A$  se pueden determinar buscando las raíces del denominador de esta ecuación,  $1 + \beta a$ .

### Teorema de Nyquist

El teorema de Nyquist permite determinar información sobre la estabilidad del amplificador usando la ganancia del lazo  $T(s) = \beta(s)a(s)$ .

Si  $f_{180^\circ}$  representa la frecuencia a la cual  $\angle T$  es  $-180^\circ$ . Si la magnitud de  $T$  a esta frecuencia cumple con la condición

$$|T(jf_{180^\circ})| = |\beta(jf_{180^\circ})A(jf_{180^\circ})| > 1$$

el amplificador no es estable. Si  $|T(jf_{180^\circ})| \leq 1$ , el amplificador es estable.

### Márgenes de fase y ganancia

Los conceptos de margen de fase y de ganancia son métricas que indican cuán lejos está el amplificador de volverse inestable. El margen de ganancia se define como el número de decibelios por debajo de  $0dB$  de  $|T(jf_{180^\circ})|$ ;

$$GM = - |T(jf_{180^\circ})|$$

El margen de fase puede definirse como la diferencia entre la fase de  $T$  cuando  $|T| = 0dB$  y  $-180^\circ$

$$\phi_m = 180 + \angle T(jf_{0dB})$$

Observe que  $\angle T(jf_{0dB}) < 0$ .

Márgenes positivos indican un amplificador estable. Si los márgenes son 0 el amplificador es *marginalmente estable*.

### Peaking y Ringing

Los márgenes de fase y de ganancia se calculan a base de  $T$ , y por lo tanto se basan en la función de transferencia de lazo abierto del amplificador. Sin embargo, la respuesta del aparato a una entrada depende de la función de transferencia de lazo cerrado,

$$A(s) = \frac{a(s)}{1 + \beta(s)a(s)}$$

Si la ganancia del amplificador puede aproximarse por una función de transferencia de segundo orden sin ceros (con un numerador constante), su denominador puede expresarse en términos de la *razón de amortiguamiento*,  $\xi$ , y de la *frecuencia natural*,  $f_n$ , según

$$s^2 + 2\xi(2\pi f_n)s + (2\pi f_n)^2$$

Para este amplificador, el *factor de calidad*,  $Q$ , está dado por

$$Q = \frac{1}{2\xi}$$

El *gain peaking* puede calcularse cuando  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  usando

$$GP = 20 \log \frac{2Q^2}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

El porcentaje de *overshoot* está dado, cuando  $\xi < 1$ , por

$$OS(\%) = 100e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

El margen de fase del amplificador descrito está relacionado con  $\xi$  y con  $Q$  de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \phi_m &= \arccos \left( \sqrt{4\xi^4 + 1} - 2\xi^2 \right) \\ &= \arccos \left( \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^4}} - \frac{1}{2Q^2} \right) \end{aligned}$$

Note que esta expresión relaciona cantidades que representan la respuesta de lazo cerrado con  $\phi_m$  que es una cantidad calculada a base de la respuesta de lazo abierto  $T$ .

Algunos números convenientes son:

$\phi_m$	GP (dB)	OS (%)
60°	≈ 0.3	≈ 8.8
45°	≈ 2.4	≈ 23
30°	≈ 5	≈ 43

Es más fácil determinar el  $GP$  y el  $OS(\%)$  del  $\phi_m$  gráficamente, usando las figuras 1 y 2 que se encuentran al final de este documento.

### Razón de Clausura (*Rate of Closure*)

La fase de  $T$  puede estimarse de su gráfica *bode* de magnitud. La razón de clausura  $ROC$  representa la pendiente de  $|T(s)|$  a la frecuencia  $f_{0dB}$ , expresada en decibeles por década. Si los polos de  $T$  son reales y están separados por al menos una década, entonces

$$\phi = \angle T \approx 4.5 \times ROC$$

La razón de clausura puede obtenerse de

$$ROC = \Delta_a - \Delta_{1/\beta}$$

donde  $\Delta$  representan la pendiente de la cantidad correspondiente en  $f = f_{0dB}$ .

Estas formulas proveen un modo simple de determinar el  $\phi_m$  a partir del  $ROC$ . Algunos números convenientes son:

ROC (dB/dec)	$\phi_m$ (grados)
20	90
30	45
40	0
más de 40	menos de 0

## II. EFECTO DE UN POLO EN $\beta$

Si la  $\beta$  de la red de retroalimentación tiene un polo (cero de  $1/\beta$ ) a la frecuencia  $f_z$ ,

$$\beta(jf) = \frac{\beta_0}{1 + j\frac{f}{f_z}}$$

y el amplificador usa un AO de GBP constante, con

$$a(jf) = \frac{a_0}{1 + j\frac{f}{f_b}} \approx \frac{a_0 f_b}{jf} = \frac{f_\tau}{jf}$$

entonces

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{\beta} = \frac{jf}{f_t} \frac{1 + j\frac{f}{f_z}}{\beta_0}$$

y la ganancia de lazo cerrado es

$$\begin{aligned} A_f &= A_{f_{ideal}} \frac{1}{1 + 1/T} = \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{1 + \frac{jf}{f_t} \frac{1 + j\frac{f}{f_z}}{\beta_0}} \\ &= \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{1 + j\frac{f}{\beta_0 f_t} - \frac{f^2}{\beta_0 f_t f_z}} \\ &= \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{1 - \left(\frac{f}{f_x}\right)^2 + j\frac{f}{f_x} \frac{1}{Q}} \end{aligned}$$

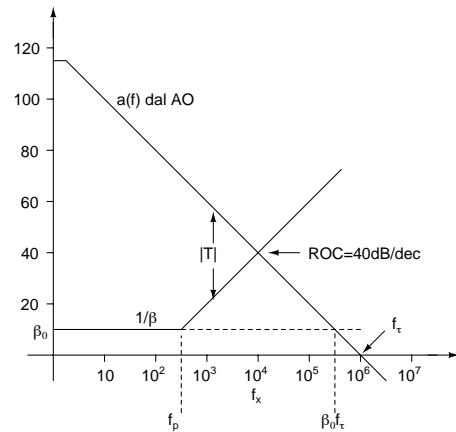
donde

$$f_x = \sqrt{\beta_0 f_t f_z}$$

y

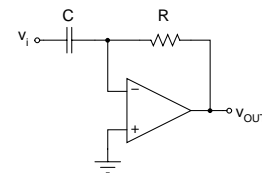
$$Q = \sqrt{\frac{\beta_0 f_t}{f_z}}$$

La razón  $\frac{\beta_0 f_t}{f_z}$  indica la posición relativa del polo de un amplificador con retroalimentación constante y el polo de la red de retroalimentación. Si  $f_z$  esta a una frecuencia mucho más baja que  $\beta_0 f_t$ , el  $Q$  aumenta, indicando que el  $\phi_m \rightarrow 0$ . Esto puede también deducirse del bode de magnitud, pues para  $f_z \ll f_t$ ,  $ROC = |\Delta_a - \Delta_{1/\beta}| = |-20dB/dec - (+20dB/dec)| = 40dB/dec$  lo que indica que  $\phi_m \approx 0^\circ$ . Esto se ilustra en la siguiente figura.



### Diferenciador

El diferenciador simple



es un ejemplo que ilustra lo antes expuesto. Partiendo de

$$\beta = \frac{1}{jf/f_0 + 1}$$

donde  $f_0 = 1/2\pi RC$ , y usando

$$a \approx \frac{f_\tau}{jf}$$

podemos expresar

$$T = \frac{f_\tau}{jf - f^2/f_0}$$

de donde obtenemos que

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{jf}{f_0} + 1 \right) \frac{1}{1 + jf/f_0 - f^2/f_\tau f_0} \\ &= A_{ideal} \frac{1}{1 + jf/f_\tau - f^2/f_\tau f_0} \end{aligned}$$

Comparando esta expresión con

$$\frac{1}{1 - \left( \frac{f}{f_x} \right)^2 + j \frac{f}{f_x} \frac{1}{Q}}$$

Obtenemos que

$$f_x = \sqrt{f_0 f_\tau}$$

y que

$$Q = f_\tau/f_x = f_\tau/\sqrt{f_\tau f_0} = \sqrt{f_\tau/f_0}$$

Usando como ejemplo  $R = 159k\Omega$  y  $C = 10nF$ , obtenemos que para un  $\mu A741$  con  $f_\tau 10^6$ ,

$$f_0 = 1/2\pi \times 159k\Omega \times 10nF \approx 100Hz$$

$$f_x = \sqrt{10^2 10^6} = 10^4$$

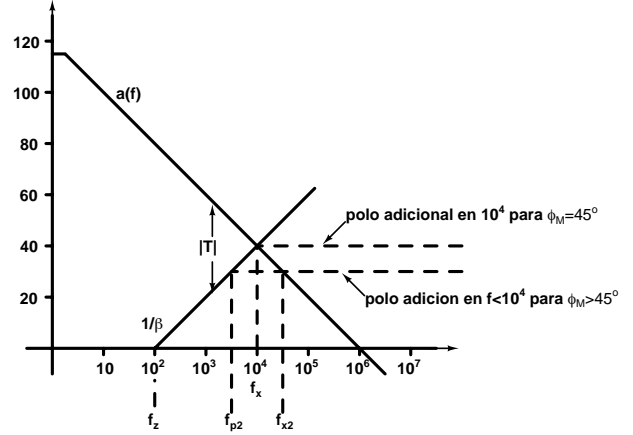
$$Q = \sqrt{10^6/10^2} = 100$$

El margen de fase puede calcularse de

$$\phi_m = \angle a(f_x) - \angle 1/\beta(f_x) = -90^\circ - \arctan 10^4/10^2$$

y resulta ser de solo  $0.6^\circ$ , muy bajo para propósitos prácticos.

La estabilidad del circuito puede mejorarse del siguiente modo. La siguiente figura muestra el bode de magnitud. Añadiendo un polo a la respuesta de  $1/\beta$  en  $f_x$  cambia el ROC de  $40dB/dec$  a  $30dB/dec$ , hacemos que  $\angle T(f_x) = -4.5 \times 30 = -135^\circ$  y  $\phi_m = 45^\circ$ .



El polo adicional en  $1/\beta$  (cero en  $\beta$ ) puede introducirse conectando una resistencia  $R_s$  en serie con el condensador. La  $R_s$  debe escogerse de tal modo que  $\frac{1}{sC} \gg R_s$  en frecuencias bajas, a las cuales el funcionamiento del circuito debe aproximar el original. La  $\beta$  del circuito modificado es

$$\beta = \frac{R_s + 1/sC}{R + R_s + 1/sC} = \frac{sCR_s + 1}{sC(R + R_s) + 1}$$

La expresión muestra que la  $R_s$  produce un cero adicional en  $\beta$  (un polo en  $1/\beta$ ) a la frecuencia  $f_p = 1/2\pi R_s C$ . El valor de  $R_s$  debe ser suficientemente pequeño para que a frecuencias bajas (a las cuales el circuito debe funcionar como el original),  $\frac{1}{sC} \gg R_s$ .

El análisis gráfico permite escoger el valor de  $R_s$  de un modo simple. La gráfica muestra que, para obtener un  $\phi_m = 45^\circ$ , la nueva frecuencia del polo  $f_p = f_x$  se encuentra en el valor promedio entre  $f_0$  y  $f_\tau$ . Dado que la escala es logarítmica, esto quiere decir que

$$\log f_p = \frac{1}{2}(\log f_\tau + \log f_0)$$

así que  $f_p = \sqrt{f_\tau f_0} = 10^4 Hz$ , como se obtuvo antes algebraicamente. En resumen, escogiendo

$$R_s = \frac{1}{2\pi C f_p} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-8} \times 10^4} = 1.6k\Omega$$

Si se estima que  $X_C \geq 10R_s$  para que el circuito aproxime el comportamiento del diferenciador, el circuito trabaja como tal desde 0 hasta  $1kHz$ .

Si se desea un  $\phi_m > 45^\circ$ , el polo debe añadirse a una frecuencia  $f_{p2}$ , como muestra la figura anterior.

Podemos observar del triángulo formado por los puntos que corresponden a  $f_x$ ,  $f_{p2}$  y  $f_{x2}$ , considerando que las escalas son logarítmicas,

$$f_x = \sqrt{f_{p2}f_{x2}} = \sqrt{f_0f_\tau}$$

Por otro lado, en  $f = f_{x2}$  el nuevo polo (que es un cero de  $\beta$  y por lo tanto de  $T$ ) provee una fase igual a  $\phi = \arctan f_{x2}/f_{p2}$ . Para el circuito en discusión,  $\phi_m = \phi$  pues sin el polo  $\phi_m = 0$ . En resumen si deseamos que, por ejemplo,  $\phi_m = 60^\circ$ ,

$$f_{x2} = f_{p2} \times \tan 60^\circ = 1.73f_{p2}$$

y

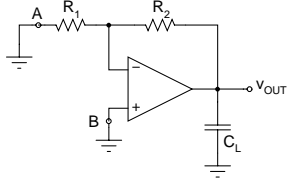
$$1.73 \times f_{p2}^2 = f_0f_\tau = 10^8$$

$$f_{p2} = \sqrt{10^8/1.73} = 7.6kHz$$

de donde obtenemos que el nuevo valor de  $R_s$  es

$$R_s = \frac{1}{2\pi C f_{p2}} = \frac{1}{2\pi \times 10^{-8} \times 7600} \simeq 2.1k\Omega$$

### III. EFECTO DE CARGAS CAPACITIVAS

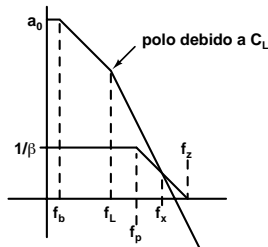


Un carga capacitiva  $C_L$  añade un segundo polo a  $a$

$$a_{loaded} = a \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_L}}$$

donde  $f_L = \frac{1}{2\pi R_O C_L}$ . Si la frecuencia de este polo es menor a la frecuencia de corte  $f_x$ , esto causa problemas de estabilidad pues  $\phi_m \approx 0$ .

Una posible solución es añadir un polo en  $1/\beta$  como ilustra en el siguiente diagrama.



La idea, que se conoce como *Feedback-lead compensation*, se puede implementar conectando un condensador  $C_f$  en paralelo con con  $R_2$ . El  $\beta$  puede conseguirse usando un divisor de voltaje;

$$\begin{aligned} Z_2 &= R_2 \parallel 1/sC_f \\ &= \frac{R_2}{sC_f R_2 + 1} \\ \beta &= \frac{R_1}{R_1 + Z_2} \\ &= \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2}{sC_f R_2 + 1}} \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{sC_f R_2 + 1}{sC_f R_2 + 1} \end{aligned}$$

donde  $R_{||} = R_1 \parallel R_2$ , y es menor que  $R_2$ . Podemos expresar  $1/\beta$  como

$$\frac{1}{\beta(jf)} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1 + j\frac{f}{f_z}}{1 + j\frac{f}{f_p}}$$

donde  $f_p = 1/2\pi R_2 C_f$  y

$$f_z = 1/2\pi R_{||} C_f = (1 + R_2/R_1) f_p$$

La fase que provee este circuito es máxima en el promedio geométrico de  $f_p$  y  $f_z$ . Para optimizar su efecto, hacemos que

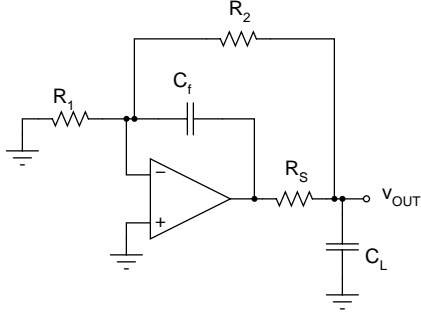
$$f_x = \sqrt{f_p f_z} = f_p \sqrt{1 + R_2/R_1}$$

La fase aportada por la red de retroalimentación es igual a

$$\angle 1/\beta = 90^\circ - 2 \arctan \sqrt{1 + R_2/R_1}$$

Por ejemplo, si la ganancia d.c. es 10 para un amplificador sin inversion,  $\angle 1/\beta \simeq -55^\circ$ . La  $\phi_m$  sería igual a  $55^\circ$  si el polo producido por  $C_L$  está a una frecuencia mucho menor (al menos una década) que  $f_x$

Franco propone el siguiente circuito como un modo de neutralizar el efecto de  $C_L$ :



donde

$$R_S = (R_1/R_2)r_O$$

y

$$C_f = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 \frac{r_O}{R_2} C_L$$

El circuito debe producir un ancho de banda de lazo cerrado igual a  $f_A = \frac{1}{2\pi R_2 C_f}$ . Los siguientes puntos deben ser tomados en cuenta:

- para el *voltage follower*, use  $R_s = 30r_O$  y  $C_f = \sqrt{\frac{C_L}{18\pi r_O \beta f_t}}$ , donde  $\beta = 1V/V$ . El ancho de banda de lazo cerrado es  $f_A = \sqrt{\frac{\beta f_t}{18\pi r_O C_L}}$ .
- $R_s$  debe ser pequeña para prevenir una degradación excesiva debida al *slew-rate*.

#### IV. COMPENSACIÓN DEL AO

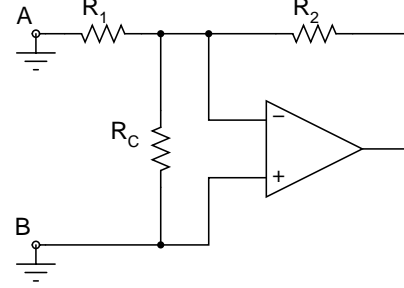
Si el AO no está compensado internamente, la  $a$  muestra varios polos y el amplificador es inestable. El diseñador es responsable de estabilizar el circuito. Esta inconveniencia es recompensada con la posibilidad de obtener anchos de banda superiores. La compensación puede alterar el circuito interno del AO usando terminales provistos por el fabricante de tal modo que hacen posible modificar la posición de los polos de  $a$ . También la respuesta de frecuencia de la red de retroalimentación puede alterarse para cambiar la fase de  $T$ .

Métodos de compensación interna son:

1. Compensación mediante adición de un polo
2. Compensación mediante desplazamiento de un polo

#### 3. Cancelación del polo con cero

La compensación externa puede realizarse usando la técnica de *feedback lead* presentada como una solución al problema de cargas capacitivas. Otro modo es reduciendo  $T$ . El siguiente diagrama muestra cómo puede reducirse  $T$  sin cambiar la ganancia d.c. del circuito.

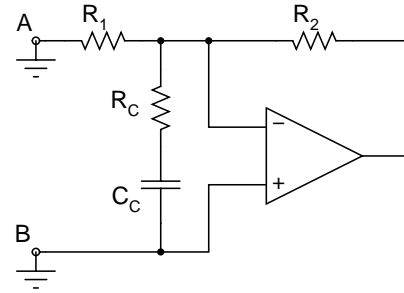


Si  $r_d = \infty$  y  $r_O = 0$ ,  $\beta$  es

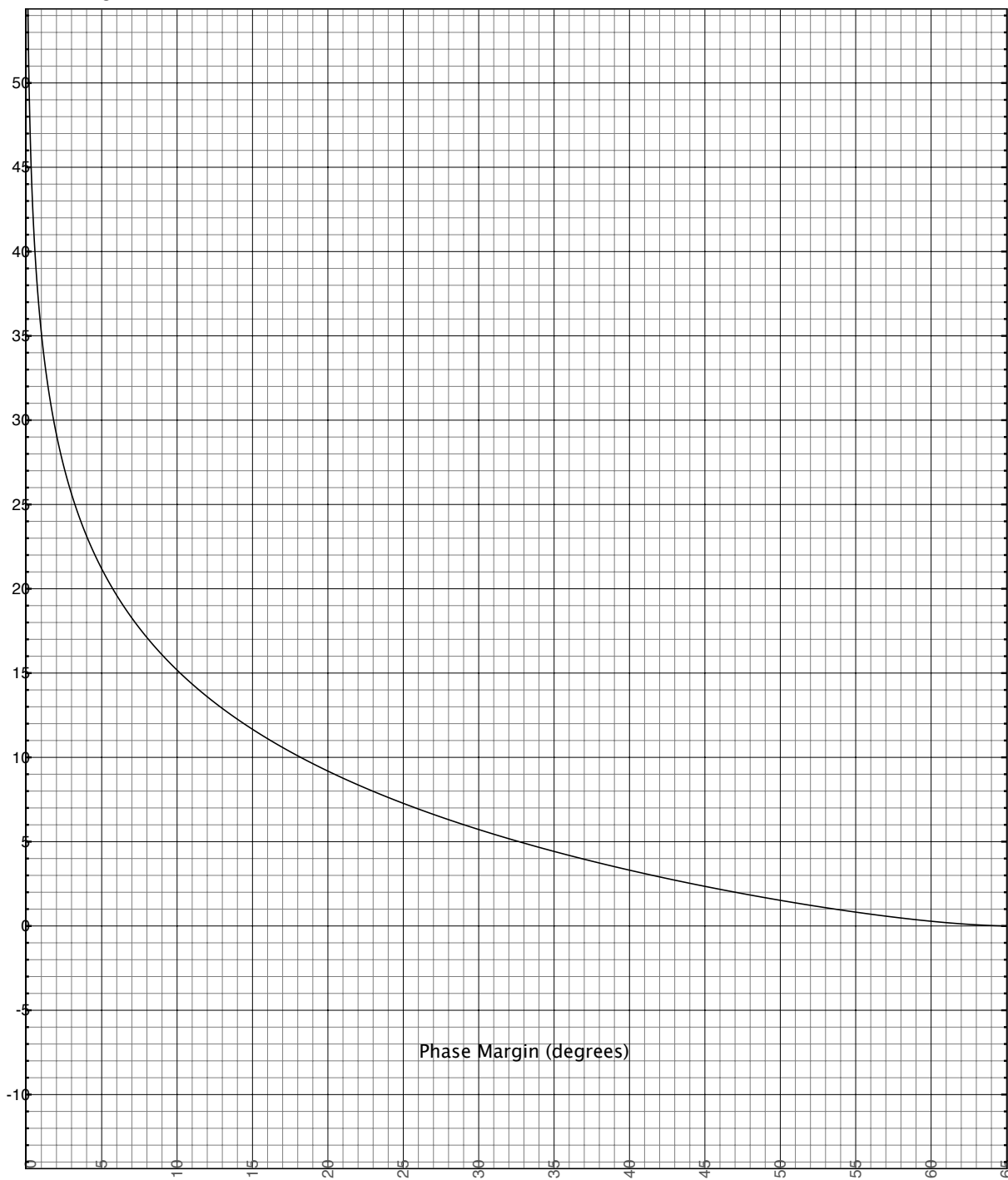
$$\frac{1}{\beta} = 1 + \frac{R_2}{R_1 \parallel R_C} = 1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_2}{R_C}$$

Para obtener  $\phi_m = 45^\circ$  debemos hacer que  $\frac{1}{\beta}$  sea igual a  $a(f_2)$ , donde  $f_2$  es la frecuencia del segundo polo de  $a$ .

La que aunque ganancia d.c. del amplificador para la señal no aumenta (ambos terminales de  $R_C$  están conectados a tierra virtual), el error debido a los *offsets* si aumenta. Esto puede evitarse usando el siguiente circuito de *input-lag*:



Gain Peaking (dB)

Figura 1: *Peacking* versus margen de fase

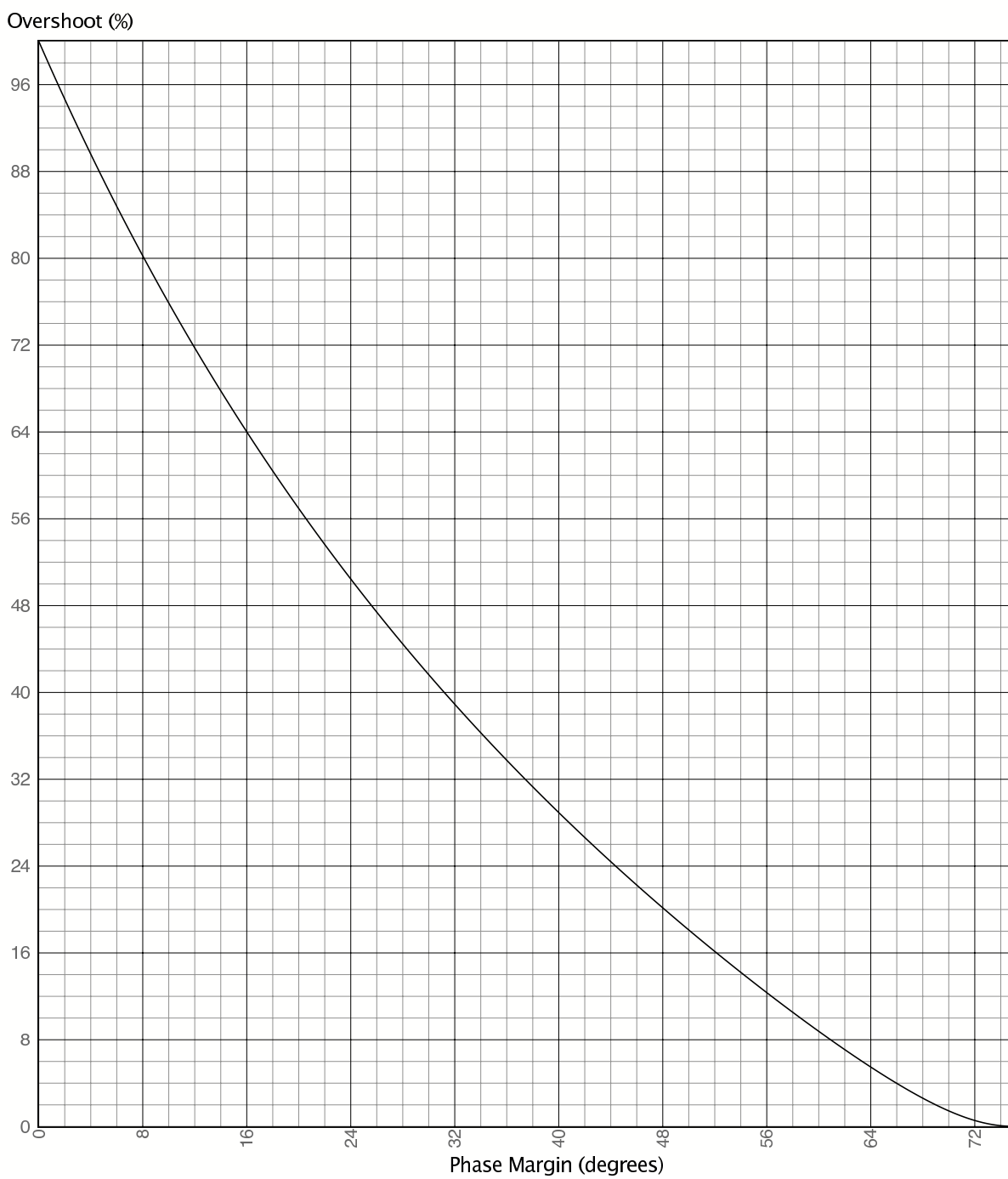


Figura 2: *Peaking* versus margen de fase