

Respuesta de Frecuencia

Manuel Toledo - INEL 5205 Instrumentación

Respuesta de Lazo Cerrado

La respuesta de frecuencia del amplificador puede obtenerse usando la ecuación básica de un sistema con retroalimentación

$$A = \frac{a}{1 + a\beta}$$

Para un AO con un polo dominante, sustituimos

$$a = \frac{a_0}{1 + jf/f_b}$$

y obtenemos

$$A = \frac{\frac{a_0}{1+jf/f_b}}{1 + \frac{a_0}{1+jf/f_b}\beta} = \frac{a_0}{1 + jf/f_b + a_0\beta}$$

Esto puede expresarse como

$$A = \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + \frac{1}{a_0\beta} + j \frac{f}{f_b a_0\beta}}$$

que a su vez puede representarse como

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + \frac{1}{a_0\beta}} \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_b a_0\beta} \left(1 + \frac{1}{a_0\beta}\right)} \\ &= \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + \frac{1}{a_0\beta}} \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_b (a_0\beta + 1)}} \\ &\approx \frac{1}{\beta} \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_b (a_0\beta + 1)}} \end{aligned}$$

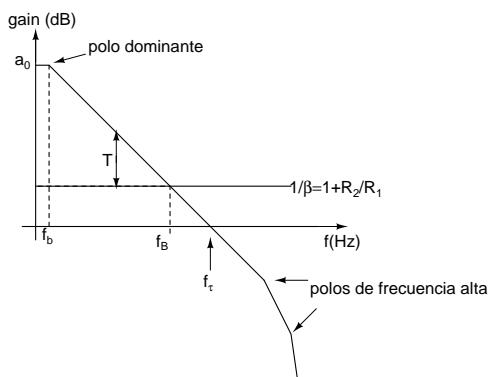
Esta ecuación muestra que la retroalimentación causa que el ancho de banda aumente de f_b (el ancho de banda del AO cuando opera en lazo abierto) a $f_b (a_0\beta + 1)$. O sea, el ancho de banda aumenta por el mismo factor que la ganancia d.c. disminuye. Por lo tanto, el producto de la ganancia y el ancho de banda permanece constante y es igual a f_τ .

El ancho de banda del amplificador con retro-alimentación puede representarse por f_B . Dado que la ganancia del aparato puede aproximarse por $1/\beta$,

$$f_b = f_\tau/a_0 \quad f_B = \beta f_\tau$$

Ancho de banda

La mayoría de los AO son compensados internamente para hacerlos incondicionalmente estables. Esto significa que el circuito interno contiene componentes que hacen que exista un *polo dominante* que se encuentra a una frecuencia mucho mas baja que los demás polos. Esta situación se muestra en la siguiente figura:



El diagrama muestra las siguientes cantidades: la ganancia de lazo abierto a , la ganancia[1] de lazo cerrado del amplificador sin inversión $1 + \frac{R_2}{R_1}$ y la frecuencia de ganancia unitaria f_τ .

Este tipo de aparato se conoce como amplificador con *producto ganancia-ancho de banda (GBP) constante*. Como indica el termino, la reducción en la ganancia del amplificador (causada por el uso de retro-alimentación negativa) esta acompañada de un aumento similar en el ancho de banda, el cual puede ser calculado usando la formula

$$f_B = \beta f_\tau = \frac{f_\tau}{1 + R_2/R_1} = \frac{R_1 f_\tau}{R_1 + R_2}$$

Ejemplo: Calcule el ancho de banda de un amplificador con ganancia $A = +100V/V$ y que utiliza el AO $\mu A741$ con $f_\tau = 1MHz$.

Amplificador con n etapas idénticas

Si se desea un GBP más grande, se pueden usar varias etapas para obtener un amplificador con la misma ganancia total. En el ejemplo anterior, la ganancia de $+100V/V$ se puede obtener con dos etapas con ganancia de $+10V/V$. Sin embargo, en este caso el ancho de banda global no es igual al de cada etapa, pues a la frecuencia f_B cada etapa reduce la ganancia por $3dB$ y la atenuación total es $6dB$.

Podemos obtener una formula para determinar el ancho de banda de un amplificador con n etapas idénticas partiendo de la respuesta de frecuencia de cada etapa,

$$A_i = \frac{A_{0i}}{\sqrt{1 + (f/f_B)^2}}$$

Para n etapas la ganancia total es

$$\left(\frac{A_{0i}}{\sqrt{1 + (f/f_B)^2}} \right)^n = \frac{A_0}{(1 + (f/f_B)^2)^{n/2}}$$

donde $A_{0i}^n = A_0$, la ganancia d.c. deseada. Notando que

$$f_B = \frac{f_\tau}{\sqrt[n]{A_0}}$$

y que a la frecuencia f_{BW} (el ancho de banda del amplificador de n etapas) la ganancia total es igual a $A_0/\sqrt{2}$, tenemos que

$$1 + \left(\frac{\sqrt[n]{A_0} f_{BW}}{f_\tau} \right)^2 = \sqrt{2}$$

y

$$f_{BW} = \frac{f_\tau}{\sqrt[n]{A_0}} \sqrt{2^{1/n} - 1}$$

donde f_{BW} es el ancho de banda del amplificador de n etapas, A_0 es la ganancia del amplificador de n etapas, y $\sqrt[n]{A_0}$ es la ganancia de cada etapa.

Etapas con inversión

La descripción anterior se refiere a n etapas sin inversión. Si se utilizan etapas con inversión, el ancho de banda debe calcularse usando $\beta = R_1/R_2 + R_1$ aunque la ganancia de cada etapa con inversión es $-R_2/R_1$. La fórmula anterior aplica sin modificación, pero el GBP del amplificador con inversión es inferior al de un amplificador sin-inversión equivalente.

Ejemplos

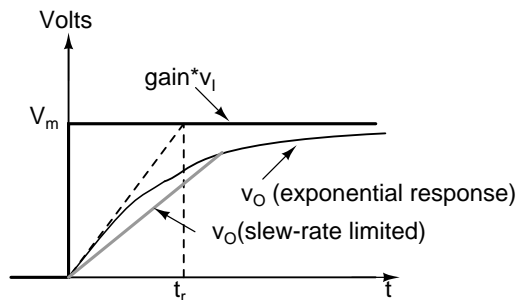
1. Determine el ancho de banda de un amplificador con $A = 500V/V$ si se usan (i) una etapa, (ii) dos etapas, y (iii) tres etapas sin inversión. Asuma que se utiliza el AO $\mu A741$.
2. Determine el ancho de banda de un amplificador si se usan (i) una etapa, (ii) dos etapas, y (iii) tres etapas con inversión para obtener una ganancia total igual a $-500V/V$. Asuma que se utiliza el AO $\mu A741$.

Razón de cambio máxima (*Slew-rate*)

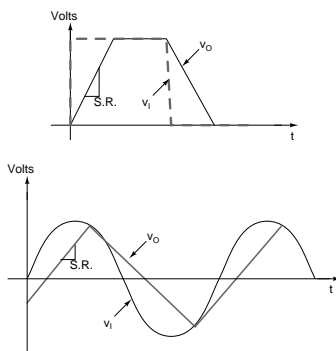
La respuesta de escalón de un sistema de primer orden es

$$v(t) = V_m (1 - e^{-t/\tau})$$

Esta expresión aplica a un amplificador que usa un AO con un polo dominante, en cuyo caso $\tau = \frac{1}{2\pi f_B}$. Sin embargo, debido a limitaciones del circuito interno del AO, si el escalón supera un tamaño particular, una respuesta de pendiente constante precederá a la respuesta exponencial, tal como muestra en la siguiente figura.



La razón máxima a la que puede cambiar el voltaje de salida se conoce como el *slew-rate* (SR). Si la señal requiere que v_{OUT} cambie a una razón superior al SR, la señal se distorsiona y la razón de cambio se limita al SR. Ejemplos de señales limitadas de este modo son los siguientes:



Para determinar el tamaño máximo del escalón que será libre de este tipo de distorsión, observe que para el $v(t)$ que representa la respuesta al escalón,

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{V_m}{\tau} e^{-t/\tau}$$

es máximo en $t = 0$. Por tanto, si

$$\frac{V_m}{\tau} < SR$$

la salida no será limitada por el SR. Esta formula se puede expresar como

$$V_m \leq \frac{SR}{2\pi f_B}$$

donde V_m representa el tamaño del escalón en la salida del amplificador y $f_B = \beta f_\tau$ es el ancho de banda del amplificador.

En el case de una señal senoidal de frecuencia f ,

$$v(t) = V_m \sin(2\pi ft)$$

la razón de cambio es

$$\frac{dv(t)}{dt} = 2\pi f V_m \cos(2\pi ft)$$

y tambien es máxima en $t = 0$ asi que para tener una señal libre de distorsión,

$$2\pi f V_m \leq SR$$

Esta condición se puede expresar como

$$f \leq \frac{SR}{2\pi V_m}$$

o como

$$V_m \leq \frac{SR}{2\pi f}$$

Ejemplos

1. Calcule f_{max} si $V_m = 10V$ y $SR = 0.5V/\mu s$.

Ejercicios

1. Problema 6.33 del libro de Sedra.

Los datos se refieren al voltaje de entrada. Para la primera onda cuadrada, el voltaje de salida tiene una amplitud de $5V$ pico y un periodo de $4\mu s$. Nuestro análisis de la respuesta de escalón se basa en el tamaño total del escalón, y corresponde al valor pico-a-pico de la señal de salida, o sea $10V$, así que la onda triangular tiene una pendiente $SR = 10V/2\mu s = 5V/\mu s$. Observe que se usa la mitad del periodo.

El segundo dato nos indica que la distorsión desaparece si se aplica una onda de entrada con amplitud pico igual a $0.4V$. Como la respuesta es de primer orden, esto corresponde a $\frac{1}{\tau} = SR/2\pi \cdot 1.6V = 497kHz$. Este valor de $\frac{1}{\tau}$ corresponde a βf_τ según nuestro análisis.

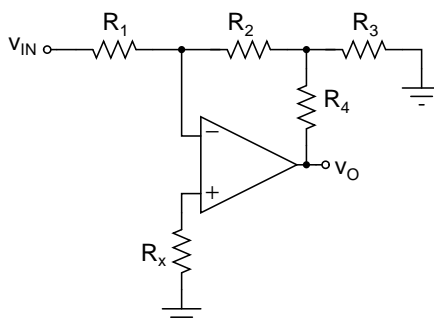
Observe que el valor de V_{om} corresponde al tamaño total de la respuesta al escalón en la salida, y es igual a $0.4 \times A \times 2 = 0.4 \times 2 \times 2 = 1.6V$ porque el problema especifica el valor pico de la onda de entrada. Además, observe que no conocemos β (pues no sabemos cual es la configuración usada y por lo tanto

desconocemos la relación entre la ganancia del amplificador y la β de la red de retro-alimentación) ni f_τ . Si estos valores se pudieran obtener, los datos referentes a la onda con amplitud de $0.4V$ no serían necesarios. Si asumimos que el amplificador utiliza una configuración simple de dos resistencias, entonces la $\beta = 1/3$ y el problema implica que $f_\tau \approx 1.5MHz$.

$f_B = \beta f_\tau$ corresponde al ancho de banda útil si el amplificador no sufre limitaciones debido al *slew-rate*. Para la señal ac con amplitud $2 \times 3.5 \times \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$ a la que se refiere el problema, la frecuencia máxima que esta libre de distorsión es $f = 5V/\mu s / 2\pi 2\sqrt{2} \approx 80kHz$. Por lo tanto, la respuesta esta limitada por el SR (*large-signal limited*) y el ancho de banda útil es $80kHz$.

Observe que mientras para la onda cuadrada el análisis utilizó el valor pico-pico, para la onda senoidal se usó el valor pico.

2. Para el siguiente circuito,



- a) escoja las resistencias R_1 , R_2 , R_3 y R_4 para obtener una ganancia de voltaje de $-1000V/V$ y una resistencia de entrada de $1k\Omega$, usando las resistencias más pequeñas posibles, pero sin exceder la mitad de la corriente máxima que el AO puede proveer o absorber. Asuma que la entrada se mantiene entre $\pm 10mV$.

RESPUESTA:

Si la entrada es $-10mV$, la salida es $10V$. Como la corriente máxima del AO (asumiendo un $\mu A741$) es $20mA$, la corriente a través de R_4 debe mantenerse cerca de $10mA$.

La salida del circuito puede expresarse como

$$v_O = -v_{IN} \times \frac{R_2}{R_1} \times \left(1 + \frac{R_4}{R_2} + \frac{R_4}{R_3}\right)$$

La ganancia deseada puede obtenerse de muchas formas. Seleccionando $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 100\Omega$, $R_3 = 11.5\Omega$ y $R_4 = 1020\Omega$ obtenemos una ganancia igual a $-999V/V$. La corriente de salida, dada por

$$i_4 = \frac{v_{IN}}{R_1} \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)$$

sería igual a $9.7mA$, bastante cerca del objetivo de $10mA$.

- b) estime el peor error que se espera en la salida debido al efecto de I_B , I_{OS} y V_{OS} si $R_x = 0$; repita pero esta vez escoja R_x de tal modo que el error se minimice;

RESPUESTA:

Usando superposición, podemos expresar los errores debido a i_N , i_P y V_{OS} ,

$$e_{i_N} = \left(1 + \frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_4}\right) R_4 i_N$$

$$e_{i_P} = -\left(1 + \frac{R_2}{R_1} + \frac{R_4}{R_1} + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3}\right) R_x i_P$$

$$e_{OS} = \left(1 + \frac{R_3}{R_1} + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{R_4}{R_3} V_{OS}$$

respectivamente. Sustituyendo los valores asignados anteriormente a las resistencias, obtuve que

$$e_{i_N} = +9990\Omega \times i_N$$

$$e_{i_P} = -1089 \times R_x \times i_P$$

$$e_{OS} = +1078 \times V_{OS}$$

Así que si $R_x = 0$, el error en la salida es

$$e = +9990\Omega \times (I_B + I_{OS}) + 1078 \times V_{OS}$$

Para el $\mu A741$, este valor puede superar los $5V$ debido a la alta ganancia del amplificador y a que V_{OS} puede alcanzar los $5mV$. R_x puede escogerse igual a $\frac{9990}{1089} = 9.2\Omega$ para cancelar el componente debido a I_B . En todo caso, es necesario ajustar el circuito para reducir el error debido a V_{OS} , o escoger otro AO con un V_{OS} mucho más bajo.

- c) determine la frecuencia más alta de la señal senoidal que el circuito será capaz de amplificar sin superar el *slew-rate*;

RESPUESTA:

De las notas del curso, para que no exista distorsión debido al SR,

$$fV_{om} \leq \frac{SR}{2\pi}$$

así que, para un $SR = 0.5V/\mu s$,

$$f_{max} = \frac{SR}{2\pi V_{om}} = \frac{0.5}{2\pi \times 10} MHz = 8kHz$$

- d) simule el circuito en SPICE y verifique que los resultados anteriores son correctos.

3. Un instrumento utiliza un convertidor análogo-digital (ADC) de 10-bits que acepta una señal senoidal de entrada con amplitud de hasta $\pm 2.5V$ con una frecuencia de 200,000 muestras por segundo (o una frecuencia de señal máxima de 100kHz). El instrumento será usado para leer la salida de un sensor que provee un voltaje en un rango de $\pm 5mV$.

- a) Diseñe un amplificador para acoplar el sensor al ADC usando AOs con $f_\tau = 2MHz$, pero ideales en otros aspectos. Específicamente, asuma que los AO no muestran limitaciones debido al *slew-rate*. Utilice el número mínimo de etapas no-invertidoras idénticas necesario para usar el ancho de banda del ADC.

RESPUESTA:

Debemos obtener primero la ganancia. Para las cantidades especificadas, $A_v = \frac{2.5V}{5mV} = +500$. Si usamos una etapa, el ancho de banda sería $f_{3dB} = \frac{f_\tau}{A_v} = \frac{2 \times 10^6 Hz}{500} = 4kHz$, así que es necesario usar múltiples etapas. El ancho de banda de n etapas no-invertidoras idénticas, cada una con ganancia d.c. A_0 , está dado por

$$f_{3dB} = \frac{f_\tau}{A_0} \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Para 3 etapas,

$$f_{3dB} = \frac{2 \times 10^6 Hz}{500^{\frac{1}{3}}} \sqrt{2^{\frac{1}{3}} - 1} = 128kHz$$

lo cual es adecuado. Así que cada etapa debe tener una ganancia $A_{v1} = 500^{\frac{1}{3}} = 7.94$.

- b) Para su diseño, determine el valor máximo de V_{OS} que los AO pueden mostrar sin exceder un error mayor a $\pm\frac{1}{2}$ bit. Desprecie errores debidos a I_B e I_{OS} .

RESPUESTA:

Para el ADC de 10-bit descrito en el problema, medio bit equivale a $\frac{1}{2} \times \frac{2 \times 2.5V}{2^{10}} \approx 2.4mV$. El error en la salida del amplificador debe ser menor que este valor. Mientras que el *offset* del AO que esta conectado al sensor es amplificado por las tres etapas, el del segundo AO es solo amplificado por dos etapas y el del tercer AO solo por una etapa. En el peor caso, todos los *offsets* tienen el mismo signo y

$$E_o = 500 \times V_{OS} + 7.94^2 \times V_{OS} + 7.94 \times V_{OS} = 2.4mV$$

lo que permite estimar que V_{OS} debe ser menor a $\frac{2.4mV}{571} = 4.2\mu V$.

- c) Cual es el *slew-rate* minimo que se requiere para que no haya distorsión?

RESPUESTA:

De las notas del curso, para que no exista distorsión debido al SR,

$$fV_{om} \leq \frac{SR}{2\pi}$$

Asi que nuestro diseño requiere

$$SR \geq 2\pi f_{3dB} V_{om} = 2\pi \times 2.5V \times 100kHz = 1.57V/\mu s$$

[1] Igual al reciproco de la función de transferencia de la red de retro-alimentación, $1/\beta$.